数学分析核心知识点（第 1—20 题）

按照数学分析教材的知识体系整理 · 包含定义、数学表达式、定理条件、逻辑关系和典型例子

以下按照数学分析教材的知识体系整理，包含**定义、数学表达式、定理条件、逻辑关系和典型例子**。尽量做到既适合复习，也适合考试时直接组织答案。

一、极限与无穷小（1—10）

1. 数学分析的核心研究对象是什么?

数学分析的核心研究对象是**函数及其极限过程**，主要研究函数的连续性、可导性、可积性以及函数的性质。

其核心思想是利用极限这一数学工具，研究变量在无限接近某个值或趋于无穷时的变化规律。

主要内容包括：

- 极限理论：数列极限、函数极限。
- 连续性理论：函数连续、一致连续。
- 微分学：导数、微分及其应用。
- 积分学：定积分、不定积分及其应用。
- 级数理论：数项级数、函数项级数等。

2. 数列极限 ε-N 定义中，ε 的任意性与 N 的存在性有何逻辑关联?

数列极限的 ε-N 定义：

设数列 $\{a_n\}$，若存在常数 A，使得对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有：

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A。

其逻辑关系为：

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N, \quad |a_n - A| < \varepsilon}$$

核心理解：

1. **ε 的任意性**：无论要求多高的精度，都必须满足。
2. **N 的存在性**：对于每一个给定的 ε，都能找到一个足够大的正整数 N。
3. **二者的关系**：N 可以依赖于 ε，即 $N = N(\varepsilon)$，但不能依赖于 n。

举例：要求数列与极限的误差小于 0.01，可以找到一个 N；如果要求误差小于 0.000001，则可以找到另一个更大的 N。

> **关键**：先任意给定 ε，再找到对应的 N。不能先固定 N 再决定 ε。

3. 函数极限 ε-δ 定义与数列极限定义的本质差异是什么?

数列极限使用 ε-N 定义，函数极限使用 ε-δ 定义。

函数极限定义：

若对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当

$$0 < |x - a| < \delta$$

时，恒有：

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称：

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

两者的区别：

比较方面	数列极限	函数极限
自变量	正整数 n	实数 x
控制量	N	δ
变化过程	n 趋于无穷	x 趋近于 a
定义要求	n 足够大	x 足够接近 a

本质区别：

- 数列是离散变量，研究的是项数逐渐增大时的变化。
- 函数自变量通常是连续变量，研究的是自变量在某个去心邻域内趋近指定点时的变化。

4. 无穷小量的定义是什么？它的阶如何划分?

定义：

当自变量 x 趋近于某个定值或无穷时，如果函数 $\alpha(x)$ 的极限为零，则称 $\alpha(x)$ 为无穷小量。

即：

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$$

无穷小量的阶主要通过两个无穷小量的比值来比较。

设 α, β 都是无穷小量，且 $\beta \neq 0$:

条件	名称	含义
$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$	高阶无穷小	α 比 β 趋近于零更快
$\lim \frac{\alpha}{\beta} = C \neq 0$	同阶无穷小	α 和 β 阶数相同
$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$	等价无穷小	α 和 β 渐近相等
$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$	低阶无穷小	α 比 β 趋近于零更慢

例如，当 $x \to 0$ 时：

$$x^2 = o(x), \qquad x^3 = o(x^2)$$

其中 x^2 是比 x 高阶的无穷小。

> **注意** 等价无穷小一定是同阶无穷小，但同阶无穷小不一定等价。

5. 两个无穷小量的商的极限有哪几种结果？对应的名称是什么？

设 α, β 均为无穷小量，考察：

$$\lim \frac{\alpha}{\beta}$$

主要有以下几种结果：

1. 极限等于 0：α 是 β 的高阶无穷小。
2. 极限等于非零有限常数：α 与 β 是同阶无穷小。
3. 极限等于 1：α 与 β 是等价无穷小。
4. 极限为无穷大：α 是 β 的低阶无穷小。
5. 极限不存在：两者的阶无法通过该极限直接比较。

例如：

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

所以 x^2 是 x 的高阶无穷小。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

所以 $\sin x \sim x$。

6. 极限四则运算法则的适用前提是什么？

设：

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = B$$

若 A、B 均为有限数，则：

（1）加法法则

$$\lim(f+g)=A+B$$

（2）减法法则

$$\lim(f-g)=A-B$$

（3）乘法法则

$$\lim(fg)=AB$$

（4）除法法则

$$\lim\frac{f}{g}=\frac{A}{B}$$

其中要求：

$$B\neq 0$$

其他适用条件：

- 函数在相应的去心邻域内有定义。
- 进行除法运算时，分母不能为零。
- 对于无穷极限，不能直接无条件套用有限极限的四则运算法则。

> **注意** 以下属于未定式，不能直接使用四则运算法则求值：

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty$$

以及：

$$1^{\infty},\quad 0^{0},\quad \infty^{0}$$

需要通过等价无穷小、洛必达法则、变量替换等方法进一步计算。

7. 单调有界定理的内容是什么？它适用于数列还是函数？

单调有界定理：单调且有界的数列必定收敛。

具体包括：

- 单调递增且有上界的数列必定收敛，其极限等于数列所有项的上确界。
- 单调递减且有下界的数列必定收敛，其极限等于数列所有项的下确界。

数学表达：

$$a_n\uparrow,\quad a_n\le M\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}a_n=A$$

$$a_n\downarrow,\quad a_n\ge m\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}a_n=A$$

适用对象：数列。

注意 单调有界定理不能直接表述为任意函数单调有界就必然具有某个有限极限。对于函数，还需要明确自变量趋近的方向和区间。

8. 夹逼准则的内容是什么？举例说明其用法。

夹逼准则：

设在某个去心邻域内，有：

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

且：

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A$$

则：

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = A}$$

核心思想：一个函数被两个极限相同的函数夹在中间，那么它的极限也必然等于这个共同值。

典型例题：

求：

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$$

因为：

$$-1 \le \sin \frac{1}{x} \le 1$$

两边同时乘以 $x^2 \ge 0$，得到：

$$-x^2 \le x^2 \sin \frac{1}{x} \le x^2$$

又因为：

$$\lim_{x \to 0} (-x^2) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

根据夹逼准则：

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0}$$

考试重点 夹逼准则常用于处理含有三角函数、绝对值以及振荡函数的极限。

9. 正弦函数与自变量比值在自变量趋于零时的重要极限，其核心思想是什么？

重要极限：

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

核心思想是：当角度趋近于零时，正弦函数与自变量在渐近意义下等价。

也就是：

$$\sin x \sim x, \qquad x \to 0$$

几何证明的核心思路：

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，利用单位圆中的几何关系可以得到：

$$\sin x < x < \tan x$$

整理得到：

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

由于：

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

利用夹逼准则即可得到重要极限。

它的重要应用是等价无穷小替换：

$$\sin x \sim x$$
$$\tan x \sim x$$
$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

参考：Proof of limit of sin x / x = 1 as x approaches 0 | Math-Linux.com

10. 自变量趋于无穷时，"1 加自变量倒数"的自变量次方的重要极限，反映了什么数学本质?

重要极限：

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

其中：

$$e \approx 2.71828$$

它反映了**自然常数 e 的定义及指数增长的连续化本质。**

核心理解：

当一个量以越来越小的增量不断复合增长时，其增长过程可以趋向一个连续增长模型，而这个极限值就是自然常数 e。

典型应用：

- 连续复利计算。
- 指数函数与自然对数。

- 微积分中的指数增长和衰减。
- 概率论中的泊松分布等。

例如，连续复利模型：

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

当复利次数 $n \to \infty$ 时：

$$A \to Pe^r$$

二、函数连续性（11—17）

11. 函数在某点连续的两种等价定义是什么？

设函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 的某个邻域内有定义。

定义一：极限定义

如果：

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

则称函数 $f(x)$ 在点 a 连续。

这意味着：

1. $f(a)$ 有定义。
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ 存在。
3. 极限值等于函数值。

定义二：ε-δ 定义

对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当：

$$|x - a| < \delta$$

时，有：

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

则称函数在点 a 连续。

另外，还有一个非常重要的等价判定方式——**数列判定法**：

对于任意满足 $x_n \to a$ 的数列，都有：

$$f(x_n) \to f(a)$$

12. 函数间断点的分类及各自定义是什么？

如果函数在点 a 不连续，则称 a 为函数的间断点。

间断点主要分为两大类：

第一类间断点：左右极限均存在且有限

（1）可去间断点

左右极限存在且相等，但不等于函数值，或者函数在该点没有定义。

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad A \neq f(a)$$

或 $f(a)$ 无定义。

（2）跳跃间断点

左右极限均存在且有限，但不相等。

$$f(a-0) \neq f(a+0)$$

第二类间断点：左右极限至少有一个不存在或为无穷大

（3）无穷间断点

函数在该点附近趋于正无穷或负无穷。

例如：

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \to 0$$

（4）振荡间断点

函数在该点附近无限振荡，极限不存在。

例如：

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \to 0$$

参考：Removable Discontinuity（mathwords.com） · Limits Involving Infinity（emathhelp.net） · Unstetigkeit（spektrum.de）

13. 闭区间连续函数的有界性定理内容是什么？

有界性定理：

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，那么函数在该区间上必定有界。

即存在正数 M，使得：

$$|f(x)| \leq M, \qquad x \in [a, b]$$

核心条件：

- 函数在整个区间上连续。
- 区间必须是闭区间。
- 区间必须是有限区间。

例如：

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在开区间 $(0,1)$ 上连续，但无界。

因此，闭区间这一条件非常重要。

14. 闭区间连续函数最值定理的条件是什么？

最值定理：

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么函数在该区间上一定能够取得最大值和最小值。

即存在：

$$x_1, x_2 \in [a,b]$$

使得对任意 $x \in [a,b]$，有：

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

其中：

- $f(x_1)$ 是最小值。
- $f(x_2)$ 是最大值。

必须满足的条件：

1. 函数在 $[a,b]$ 上连续。
2. 区间是有界闭区间。

> **注意** 有界不代表一定能取得最大值和最小值。例如 $f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 上有界，但不能取得最大值和最小值。

15. 闭区间连续函数介值定理（含零点定理）的内容是什么？

介值定理：

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么对于介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意实数 C，至少存在一点：

$$\xi \in [a,b]$$

使得：

$$f(\xi) = C$$

即函数在连续变化过程中，不会跳过两个端点函数值之间的任何数值。

零点定理：

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且：

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

那么至少存在一点：

$$\xi \in (a,b)$$

使得：

$$\boxed{f(\xi)=0}$$

核心应用：证明方程在某个区间内至少存在一个实根。

> **注意** 零点定理只能保证至少存在一个零点，不能保证零点唯一。

参考：介值定理示意图（Wikimedia Commons）

16. 一致连续与点点连续的区别是什么?

这是一个非常重要的概念区别。

点点连续（逐点连续）：

函数在定义域内每一个点都连续。

对于任意固定的 x_0，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得：

$$|x-x_0|<\delta$$

时：

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

其中 δ 可以依赖于 x_0。

一致连续：

对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个统一的 $\delta>0$，使得对于定义域内任意的 x_1,x_2，只要：

$$|x_1-x_2|<\delta$$

就有：

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

这里的 δ 不能依赖于具体的点。

比较方面	点点连续	一致连续
δ 的选择	依赖于具体点	不依赖于具体点
控制范围	局部控制	整个定义域统一控制
条件强弱	较弱	较强

因此：

$$\boxed{\text{一致连续}\Rightarrow\text{点点连续}}$$

但反过来不一定成立。

经典反例：

$$f(x)=x^2,\quad x\in\mathbb{R}$$

该函数在整个实数域上连续，但不一致连续。

17. 康托尔定理的内容及适用范围是什么?

康托尔定理（连续函数的一致连续性定理）：

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么它在该闭区间上必定一致连续。

即：

$$\boxed{f \in C[a,b] \Rightarrow f \text{ 在 } [a,b] \text{ 上一致连续}}$$

适用条件：

1. 函数在整个区间上连续。
2. 区间是闭区间。
3. 区间是有界区间。

它揭示了一个重要关系：

在闭区间上，逐点连续能够进一步保证一致连续。

> **注意** 该定理不能直接推广到任意开区间或无界区间。

三、导数与微分（18—20）

18. 函数在某点可导的定义是什么？导数的几何意义是什么?

（1）导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义。

如果极限：

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

存在且为有限值，则称函数在点 x_0 可导，该极限称为函数在该点的导数。

其中：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

称为平均变化率，而：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

称为瞬时变化率。

（2）导数的几何意义

导数表示函数曲线在某一点处切线的斜率。

当割线上的动点逐渐靠近固定点时，割线逐渐趋近于切线，其斜率趋近于导数值。

切线方程为：

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

（3）导数的物理意义

导数还表示瞬时变化率。

例如：

- 位移对时间求导，得到瞬时速度。
- 速度对时间求导，得到瞬时加速度。
- 成本函数对产量求导，得到边际成本。

参考：导数的几何意义 - Canis的考研数学2笔记

19. 函数可导与连续的逻辑关系是什么？

核心结论：

$$\boxed{\text{可导必连续，连续不一定可导}}$$

（1）可导必连续

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，那么它在该点一定连续。

证明思路：

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

可以写成：

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

当 $\Delta x \to 0$ 时：

- 第一项趋于有限的导数值。
- 第二项趋于零。

因此：

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

所以函数在该点连续。

（2）连续不一定可导

经典反例：

$$f(x) = |x|$$

在 $x = 0$ 处连续，但是：

$$f'_-(0) = -1$$

$$f'_+(0)=1$$

左右导数不相等，因此在 $x=0$ 处不可导。

直观理解：函数连续意味着图像没有断开；函数可导意味着在该点具有确定的切线斜率。连续不代表曲线一定光滑。

20. 导数的乘积法则与商法则公式是什么?

设函数 $u(x)$、$v(x)$ 在某点可导。

（1）乘积法则

两个函数乘积的导数，等于第一个函数的导数乘以第二个函数，加上第一个函数乘以第二个函数的导数。

即：

$$\boxed{(uv)'=u'v+uv'}$$

例如：

$$y=x^2\sin x$$

则：

$$y'=2x\sin x+x^2\cos x$$

（2）商法则

两个函数商的导数，等于分母乘以分子导数，减去分子乘以分母导数，再除以分母的平方。

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}$$

要求：

$$v(x)\neq 0$$

例如：

$$y=\frac{x^2}{\sin x}$$

则：

$$y'=\frac{2x\sin x-x^2\cos x}{\sin^2 x}$$

四、前 20 题知识框架总结

为了方便后续复习，把这 20 个问题之间的逻辑关系整理如下：

数学分析的基础：极限理论

ε-N 定义 · ε-δ 定义 · 无穷小 · 极限运算法则

函数连续性理论

连续定义 · 间断点 · 有界性 · 最值定理 · 介值定理

微分学基础

导数定义 · 几何意义 · 可导与连续 · 求导法则

建议优先掌握的 8 个考试重点：

题号	核心知识	重要程度
2	ε-N 定义及量词顺序	很高
4—5	无穷小的阶与等价关系	很高
8—10	夹逼准则与两个重要极限	很高
11—12	连续性与间断点分类	很高
13—17	闭区间连续函数的五个重要结论	很高
18	导数定义及几何意义	很高
19	可导与连续的关系	很高
20	乘积与商的求导法则	很高

这 20 题基本构成了数学分析前期最重要的一条知识主线：**极限 → 连续 → 可导。**后续学习微分中值定理、泰勒公式、积分学时，都会反复用到这些基础结论。